ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX

CONCOURS D'ENTREE - Session 1987 — **1ère épreuve de Mathématiques**

Durée : 2 H

Cette épreuve est destinée aux élèves des classes de Mathématiques Spéciales **M, P, P', T, TA, TB.**

Lors de la correction de l'épreuve, il sera tenu compte :

- de la clarté de la rédaction
- de la rigueur des raisonnements
- du choix de la solution proposée.

L'utilisation des calculatrices est autorisée.

a et b étant deux réels positifs, on désigne par

. $M_n(a, b)$ la matrice d'ordre n, $n \geq 2$

$$M_n(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & -b & \cdots & -b \\ -a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ -a & \cdots & -a & 1 \end{bmatrix}$$

. $D_n(a, b)$, le déterminant de $M_n(a, b)$

1) a) Quelle relation y-a-t-il entre $D_n(a, b)$ et $D_n(b, a)$?

b) Pour a différent de b, montrer que

$D_n(a, b) = f(a)\, D_{n-1}(a, b) + g(a, b)$

où $f(a)$ et $g(a, b)$ sont deux fonctions que l'on déterminera

En déduire que :

$$D_n(a, b) = \frac{b\,(1+a)^n - a\,(1+b)^n}{b-a}$$

c) Calculer $D_n(a, a)$

On suppose désormais $0 \leq a \leq b$

2) a) Montrer qu'une condition suffisante pour que

$D_n(a,b) > 0$ est que $b \leq \dfrac{1}{n-1}$

b) Montrer que $D_n(a, a) > 0 \iff a < \dfrac{1}{n-1}$

3) a) Calculer les valeurs propres de $M_n(a, a)$ et déterminer les vecteurs propres.

b) $M_n(a, a)$ est-elle diagonalisable ?

4) a différent de b

a) Calculer les valeurs propres réelles ou complexes de $M_n(a, b)$

b) $M_n(a, b)$ est-elle diagonalisable ?

c) Dans le plan complexe, on considère les points A et B d'affixés respectives $1 + a$ et $1 + b$

On pose $k = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

soient G_1 le barycentre des points $(A, 1)$ et $(B, -k)$ et G_2 le barycentre des points $(A, 1)$ et (B, k)

Montrer que les images, dans le plan complexe, des valeurs propres de $M_n(a, b)$ sont situées sur un cercle (C).

On précisera la position du centre de (C) par rapport à G_1 et G_2 et on calculera le rayon R de (C).

5) Application : $n = 8$ $a = \dfrac{1}{32}$ $b = 8$

Calculer les valeurs propres de $M_8\left(\dfrac{1}{32}, 8\right)$

Construire le cercle (C) et positionner sur (C) les images des différentes valeurs propres.

• • •
•